SYSTEMES DYNAMIQUES

I OBJECTIFS DE LA THEORIE

II QUELQUES CONCEPTS DE THEORIE ERGODIQUE

III SYSTEMES DYNAMIQUES CHAOTIQUES (HYPERBOLIQUES)

IV SYSTEMES DYNAMIQUES QUASIPERIODIQUES

Première Leçon

- Deux problèmes fondateurs : la mécanique céleste et la mécanique statistique.

- Qu'est-ce qu'un système dynamique ? Espace des phases, équation d'évolution.

- Deux exemples paradigmatiques : rotations et doublement d'angle sur le cercle.

Le problème des n corps en mécanique céleste

- masses ponctuelles $m_0, \ldots, m_n$ (cas planétaire : $m_0 >> m_1, \ldots, m_n$)

  positions $q_0, \ldots, q_n \in \mathbf{R}^3$

  vitesses $\dot{q}_0, \ldots, \dot{q}_n \in \mathbf{R}^3$

- loi de gravitation universelle (Newton) : entre chaque paire de corps s'exerce une force d'attraction proportionnelle à leurs masses et à l'inverse du carré de leur distance

$$m_i \, \ddot{q}_i = \sum_{j \neq i} \; m_i m_j \; \frac{q_j - q_i}{\|q_j - q_i\|^3}$$

Mécanique céleste : suite

- Lois de conservation : quantité de mouvement, moment cinétique

- Le cas de 2 corps : les lois de Kepler

On peut résoudre explicitement le système d'équations différentielles

→ Les trajectoires sont des ellipses (coniques) homothétiques

→ Le centre de gravité est un foyer de ces ellipses

→ L'aire balayée par le rayon joignant ce foyer à l'un des corps l'est à vitesse constante.

- Pour $n \geq 3$ corps :

  – méthodes numériques (sur des périodes pas trop longues)

  – formules approchées

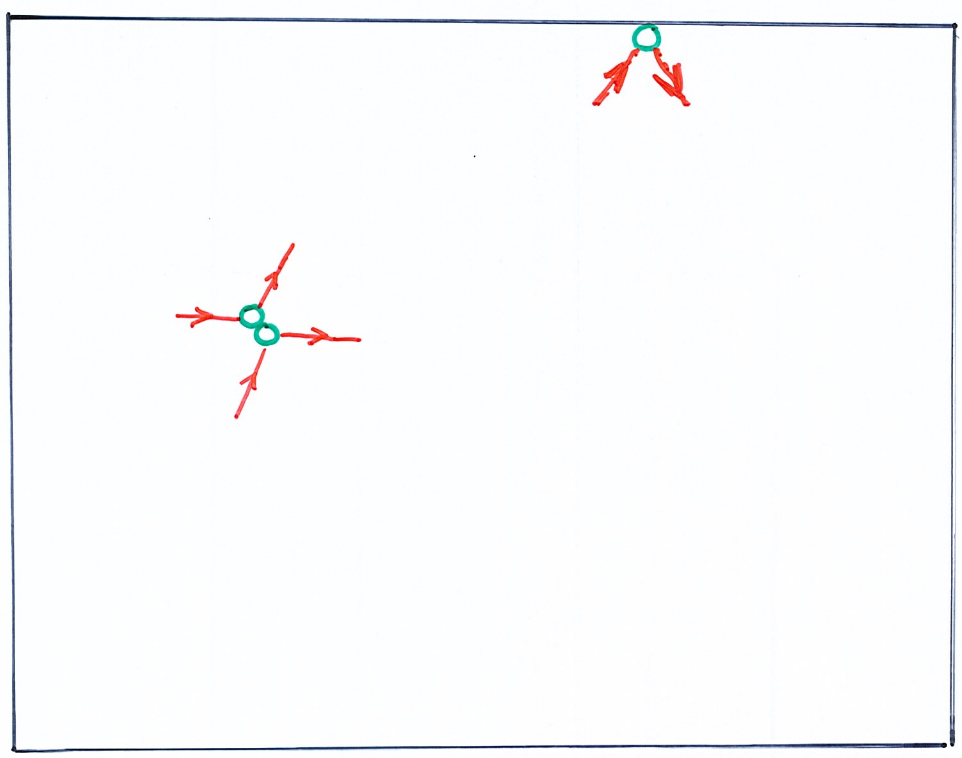
  – pas de formules exactes

  Poincaré

  – méthodes géométriques

Un modèle mécaniste pour expliquer les lois de la thermodynamique

Un très grand ($\sim 10^{23}$) nombre de particules sphériques de très petit rayon se déplace librement dans un récipient, en rebondissant élastiquement les unes contre les autres et sur les parois.



Mécanique statistique (suite)

Les grandeurs macroscopiques restent-elles stables au cours du temps ?

Les “molécules” sont-elles uniformément réparties dans le récipient ?

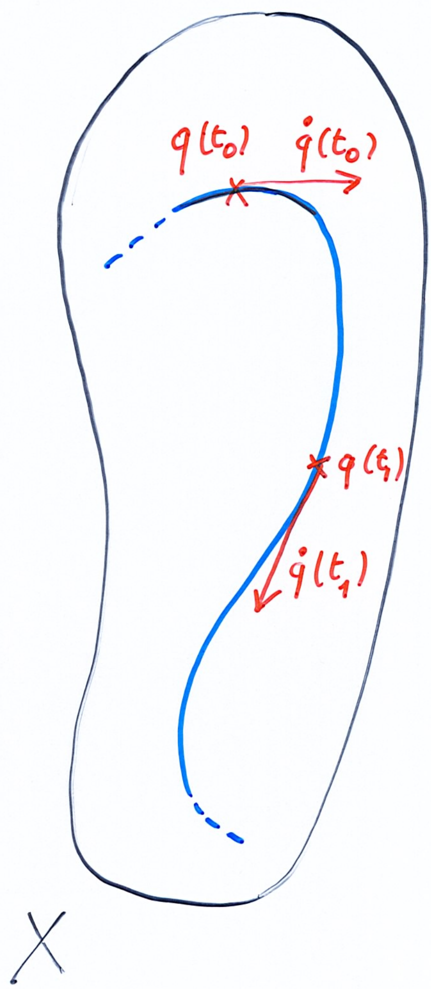
Hypothèse ergodique de Boltzmann : les moyennes temporelles des observables sont égales aux moyennes spatiales (cf. 2ème leçon : théorème ergodique de Birkhoff)

Qu'est-ce qu'un système dynamique ?

– Un espace des phases dont les points représentent les états possible du système considéré.

– Une équation d'évolution décrivant la variation de l'état du système sur le court terme.

On cherche à comprendre l'évolution sur le long, voire le très long terme.



Exemples

Le problème des $(n+1)$ corps

La loi de gravitation de Newton est une équation différentielle du second ordre.

Il faut donc connaître position et vitesse de chaque corps

$$X = \Big\{(q_0, \dots, q_n, p_0, \dots, p_n) \in (\mathbf{R}^3)^{n+1} \times (\mathbf{R}^3)^{n+1},$$
$$q_i \neq q_j \text{ pour tous } 0 \leq i < j \leq n\Big\}$$

$$\begin{cases} \dot{q}_i &= \frac{p_i}{m_i} \\ \\ \dot{p}_i &= \Sigma_{j \neq i} \; m_i m_j \; \frac{q_j - q_i}{\|q_i - q_j}\|^3 \end{cases}$$

(variation infinitésimale des paramètres décrivant l'état du système)

Exemples (II)

Mécanique statistique

N = nombre de particules, q_i = position du centre

r = rayon des particules, v_i = vitesse

U = intérieur du récipient,

$$X = \Big\{(q_1, \dots, q_N, v_1, \dots, v_N) \in U^N \times (\mathbf{R}^3)^N \; , \\ \text{dist } (q_i, q_j) \geq 2r \;\text{ pour }\; i \neq j, \text{ dist } \;(q_i, \partial U) \geq r\Big\}$$

Loi d'évolution $\qquad \dot{q}_i = v_i \quad \dot{v}_i = 0$ hors chocs

Au moment d'un choc, variation instantanée des vitesses des particules concernées suivant les principes de rebond élastique

TEMPS DISCRET ET TEMPS CONTINU

Le plus souvent, la loi d'évolution est donnée par

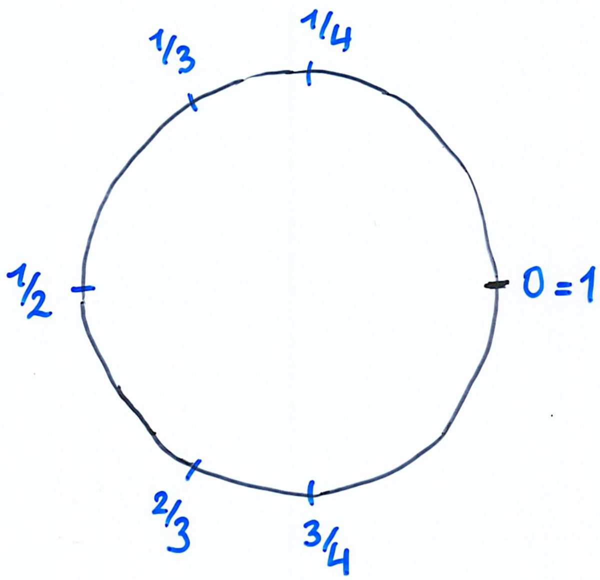
- une équation différentielle (voire une équation aux dérivées partielles si l'espace des phases est de dimension infinie) décrivant l'évolution instantanée du système : la variable temps décrit l'axe réel.

ou

- une transformation de l'espace des phases dans lui-même. La variable temps décrit les nombres entiers. La transformation appliquée au point représentant l'état du système au temps n donne le point représentant l'état du système au temps $n+1$. Comprendre l'évolution à long terme nécessite d'**itérer** cette transformation.

DEUX EXEMPLES PARADIGMATIQUES

Dans les deux cas l'espace des phases est un **cercle** dont les points sont représentés par un nombre réel θ modulo 1 (coordonnée angulaire)



Evolution 1 [chaotique/hyperbolique]

$$\theta(n+1) = 2\theta(n) \pmod 1$$

Evolution 2 [quasipériodique]

$$\theta(n+1) = \theta(n) + \omega \pmod 1$$

où ω est un nombre réel fixé (paramètre extérieur)

ORBITES PERIODIQUES

Une trajectoire $x(t)$ (t réel ou entier, $x(t) \in X$) décrivant une évolution possible du système est **périodique** de période T si on a $x(T) = x(0)$, ce qui entraîne $x(t+T) = x(t)$ pour tout temps T.

Ex. 1 $\quad \theta(N) = 2^N \theta(0) \bmod 1$,

donc $\theta(N) = \theta(0)$ si et seulement s'il existe un entier p

$(0 \leq p < 2^N - 1)$ tel que $\theta(0) = \frac{p}{2^N - 1}$

$$N = 3: \quad \frac{0}{1} \to \frac{0}{1}, \ \frac{1}{7} \to \frac{2}{7} \to \frac{4}{7} \to \frac{1}{7}, \ \frac{3}{7} \to \frac{6}{7} \to \frac{5}{7} \to \frac{3}{7}.$$

Ex. 2 $\quad \theta(N) = \theta(0) + N\omega \bmod 1$,

donc $\theta(N) = \theta(0)$ si et seulement s'il existe un entier p

$(0 \leq p < N)$ tel que $\omega = p/N$.

S'il y a une trajectoire périodique, elles le sont toutes.

SENSIBILITE AUX CONDITIONS INITIALES

" ...Car, relativement à la dernière partie de la supposition, on doit considérer que la plus légère variation dans les éléments des deux problèmes pourrait engendrer les plus graves erreurs de calcul, en faisant diverger absolument les deux courant d'événements ; à peu près de la même manière qu'en arithmétique une erreur qui, prise individuellement, peut être inappréciable, produit à la longue, par la force accumulative de la multiplication, un résultat effroyablement distant de la vérité. ..."

Edgar Allan POE
Le mystère de Marie Roget, 1843
Trad. Charles Baudelaire, 1864

<u>Ex. 1</u> $\theta(N) - \theta'(N) = 2^N(\theta(0) - \theta'(0))$

tant que ce résultat est plus petit que 1/2.

Si on connaît 12 chiffres significatifs de la condition initiale, on ne contrôle plus rien après 40 itérations ($2^{10} \approx 10^3$)

<u>Ex. 2</u> $\theta(N) - \theta'(N) = \theta(0) - \theta'(0)$

Possibilités de prévision sur le long terme.

CONJUGAISON ET STABILITE

Deux transformations $F : X \to X$ et $G : Y \to Y$ sont **conjuguées** s'il existe une transformation bijective ("changement de variables") $H : X \to Y$ telle que

$$G = H \circ F \circ H^{-1}$$

Remarque : La régularité de H n'est souvent pas aussi bonne que celle de F et G.

Exemple (= théorème)

Soit φ une fonction périodique de période 1 de classe C^1 vérifiant $|\varphi'(x)| < 1$ pour tout réel x.

Alors la transformation $F : \theta \mapsto 2\theta$ et la transformation $G : \theta \mapsto 2\theta + \varphi(\theta)$ sont conjuguées par un homéomorphisme du cercle.

("Stabilité structurelle")