Deuxième Leçon

Queques concepts de théorie ergodique

— Mesures de probabilité invariantes

— Ergodicité

— Mélange

— Entropie

MESURES DE PROBABILITE

X espace métrique compact

par exemple – toute partie fermée bornée de $\mathbf{R}^N$

– tore $\mathbf{T}^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$

– $\{0,1\}^{\mathbf{N}}, \{0,1\}^{\mathbf{Z}}, \ldots$

$C(X)$ espace vectoriel des fonctions continues sur X.

Une **mesure de probabilité** sur X est une application $\mu\ :\ C(X) \to \mathbf{R}$ vérifiant

- (linéarité) $\mu(f+g) = \mu(f) + \mu(g), \mu(\lambda f) = \lambda\mu(f)$;
- (positivité) $\mu(f) \geq 0$ si $f \geq 0$;
- $\mu(1) = 1$.

MESURES DE PROBABILITE (suite)

Pour "toute" partie A de X, on pose alors

$$\mu(A) = \mu(\mathbf{1}_A) \; .$$

On a donc $\mu(\phi) = 0, \mu(X) = 1$. Lorsque les A_i sont disjoints, on a

$$\mu(\cup_i A_i) = \sum \mu(A_i) \; .$$

Une combinaison barycentrique $\Sigma\, a_i \mu_i \quad (a_i \geq 0, \Sigma\, a_i = 1)$ de mesures de probabilité est une mesure de probabilité.

Exemples 1. **Mesures de Dirac** Pour tout $x \in X$, on définit

$$\delta_x(f) = f(x) \; .$$

2. Mesure de Lebesgue sur le cercle $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$.

$$f \mapsto \int_0^1 f(\theta) d\theta$$

MESURES DE PROBABILITE INVARIANTES

Def. : Soient $T : X \to X$ et μ une mesure de probabilité sur X. On définit une nouvelle mesure de probabilité $T_*\mu$ par

$$T_*\mu(\varphi) = \mu(\varphi \circ T) \ ,$$

$$T_*\mu(A) = \mu(T^{-1}(A)) \ .$$

On dit que μ est **invariante** par T si $T_*\mu = \mu$.

Exemples 1. La mesure de Lebesgue sur le cercle est invariante par n'importe quelle rotation $\theta \mapsto \theta + \omega$ et par le doublement d'angles $\theta \mapsto 2\theta$.

2. La mesure de Dirac δ_{x_0} est invariante si et seulement si x_0 est **fixé** par T.

3. Si x_0 est périodique de période N, la mesure

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} \delta_{T^i x_0} \quad \text{est invariante .}$$

LE THEOREME DE RECURRENCE DE POINCARE (1889)

Soient $T : X \to X$ et μ une mesure de probabilité invariante par T.

Soit A une partie de X avec $\mu(A) > 0$.

Pour μ presque tout point x de A, il existe un entier $n = n(x) > 0$ tel que $T^n(x)$ appartient à nouveau à A.

<u>Preuve</u> : $B = \{x \in A,\ T^n(x) \notin A \quad \text{pour tout } n > 0\}$

Pour $m > 0$,

$$T^{-m}B = \{x \in X,\ T^m(x) \in A,\ T^n(x) \notin A \quad \text{pour tout } n > m\}\ .$$

Donc $T^{-m}B \cap T^{-m'}B = \phi$ pour $m \neq m'$.

Or $\mu(T^{-m}B) = \mu(B)$ pour tout $m > 0$.

Par additivité et finitude, on doit avoir $\mu(B) = 0$.

ERGODICITE

Def. : Soient $T : X \to X$, $\mu \in \mathcal{M}_T(X)$.

μ est **ergodique** si toute partie $A \subset X$ telle que $T^{-1}(A) = A$ vérifie $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$.

Il revient au même de dire que toute fonction $\varphi : X \to \mathbf{R}$ vérifiant $\varphi \circ T = \varphi$ est constante (μ presque partout).

De façon équivalente : on ne peut pas représenter μ comme combinaison barycentrique (non triviale) de mesures invariantes.

Exemples 1. Si x_0, x_1 sont des points fixes distincts, δ_{x_0} et δ_{x_1} sont ergodique, $\frac{1}{2}(\delta_{x_0} + \delta_{x_1})$ ne l'est pas.

2. La mesure de Lebesgue est ergodique pour toute rotation **irrationnelle** $\theta \mapsto \theta + \omega$ et pour le doublement d'angles $\theta \mapsto 2\theta$.

EXISTENCE ET DECOMPOSITION DES MESURES INVARIANTES

- Toute transformation $T : X \to X$ possède des mesures invariantes.

  Pour tout $x_0 \in X$, la mesure $\mu_{N,x_0} = \frac{1}{N} \sum_{0}^{N-1} \delta_{T^i_{x_0}}$ est "presque invariante" lorsque N est grand ...

- Toute mesure invariante se représente de façon unique comme combinaison barycentrique (en général infinie) de mesures de probabilité invariante **ergodiques**.

- **Unique ergodicité** : on dit que T est uniquement ergodique s'il existe une **unique** mesure de probabilité invariante (automatiquement ergodique)

Exemples

1. Pour ω irrationnel, $\theta \mapsto \theta + \omega$ est uniquement ergodique.

2. Le doublement d'angles $\theta \mapsto 2\theta$ ne l'est pas : chaque orbite périodique génère une mesure invariante ergodique.

LE THEOREME DE BIRKHOFF (1931)

Soient $T : X \to X$, μ mesure de probabilité invariante ergodique

$\varphi : X \to \mathbf{R}$ intégrable (par exemple continue)

Alors, pour μ presque tout point $x \in X$,

$$\frac{1}{N} \sum_{0}^{N-1} \varphi \circ T^i(x) := \frac{1}{N} S_N\varphi(x) \longrightarrow \int_X \varphi(t) d\mu(t)$$

("Les moyennes temporelles sont égales aux moyennes spatiales")

En particulier, pour tout $A \subset X$ et μ presque tout x :

$$\frac{1}{N} \# \{i \in [0, N), T^i(x) \in A\} \longrightarrow \mu(A)$$

(Cf "Loi des grands nombres")

LE THEOREME DE BIRKHOFF (suite)

Lorsque T est uniquement ergodique, la conclusion est plus forte :

on a $\frac{1}{N}\, S_N\varphi(x) \longrightarrow \int \varphi(t)d\mu(t)$ pour **tout** $x \in X$, uniformément en x.

Exemples   1. $T =$ doublement d'angles, $A = [0, 1/2)$.

Dans le développement binaire d'un nombre **pris au hasard**, la proportion de 0 et de 1 est asymptotiquement la même.

Mais ce n'est évidemment pas le cas pour **tout** nombre.

2. $X = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n,\ T(x) = x + \omega.$

On dit que ω est totalement irrationnel s'il n'existe pas de relation $k_0 + \Sigma\, k_i\omega_i = 0$ non triviale à coefficients entiers entre 1 et les coordonnées de ω.

T ergodique $\Longleftrightarrow$ ω totalement irrationnel $\Longleftrightarrow$ T uniquement ergodique.

MELANGE

$$c_n(\varphi, \psi) := \int \varphi.\psi \circ T^n d\mu - \int \varphi d\mu \int \psi d\mu$$

Coefficient de corrélation d'ordre n.

La mesure μ/ la transformation T est **ergodique** si et seulement si, pour tous φ, ψ

$$\frac{1}{N} \sum_{0}^{N-1} c_n(\varphi, \psi) \longrightarrow 0$$

<u>Définition</u> : (T, μ) est mélangeante si on a, pour tous φ, ψ

$$c_N(\varphi, \psi) \longrightarrow 0$$

Mélange $\Longrightarrow$ ergodicité

MELANGE (suite)

Exemple 1 Quelque soit $n \geq 1, \omega \in \mathbf{R}^n$, la rotation $x \mapsto x+\omega$ n'est **pas** mélangeante.

$$\varphi(\theta) = \exp 2\pi i\theta,\ \ \psi(\theta) = \exp(-2\pi i\theta)\ ,$$

$$c_n(\varphi, \psi) = \exp(-2\pi in\omega)\ .$$

Exemple 2 $T(\theta) = 2\theta, \mu =$ Lebesgue

Pour φ de classe C^1, ψ quelconque, on a

$$|c_n(\varphi, \psi)| \leq C2^{-n}$$

Décroissance exponentielle des corrélations ($\Longrightarrow$ mélange)

Cette propriété représente la plus grande similitude possible à un système aléatoire (correspondant à $c_n(\varphi, \psi) = 0$ pour $n > 0$).

ENTROPIES (S)

(X, T, μ)

1. Partitions

$P = \{X_1, \ldots, X_l\}$ est une partition de X si $\mu(X_j) > 0$,

$$\mu(X_j \cap X_k) = 0 \text{ pour } j \neq k,\ \mu(\cup X_j) = 1 .$$

Pour $P = \{X_1, \ldots, X_l\}$, $Q = \{Y_1 \ldots Y_m\}$, on pose

$$P \vee Q = \{X_i \cap Y_j, \mu(X_i \cap Y_j) > 0\}$$

INDEPENDANCE : $\mu(X_i \cap Y_j) = \mu(X_i)\mu(Y_j)$

L'entropie (= information moyenne) de P est définie par

$$\begin{aligned} H(P) &= -\Sigma\ \mu(X_i) \log \mu(X_i) \\ &= \int_X I_P(x)\, d\mu(x) , \end{aligned}$$

$$I_P(x) = -\log \mu(X_i) \text{ pour } x \in X_i .$$

On a

$$H(P \vee Q) \leq H(P) + H(Q) \text{ avec égalité}$$

si et seulement si P, Q sont indépendantes.

ENTROPIES (S) (suite)

2. Entropie métrique

$$T^{-1}(P) := \{T^{-1}(X_1), \ldots, T^{-1}(X_l)\}$$

$$H(T^{-1}(P)) = H(P) \quad \text{par invariance}$$

$$h_n(T,P) := \frac{1}{n} H(P \vee T^{-1}P \vee \ldots \vee T^{-(n-1)}P)$$

$$h_\mu(T,P) := \lim_{n\to+\infty} h_n(T,P)$$

$$h_\mu(T) := \sup_P \; h_\mu(T,P)$$

3. Entropie topologique

Principe variationnel

$$h_{\text{top}}\,(T) = \sup_\mu \; h_\mu(T)$$

Deux points x, y sont (ε, n) séparés s'il existe $i < n$ tel que dist $(T^i x, T^i y) > \varepsilon$.

$$r(\varepsilon,n) = \text{nombre maximal de points 2 à 2 } (\varepsilon,n) \text{ séparés.}$$

$$h_{\text{top}}\,(T) = \lim_{\varepsilon\to 0} \; \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \; r(\varepsilon,n)$$

ENTROPIES (S) : Exemples

A) $\theta \mapsto \theta + \omega$ sur le cercle.

$$x, y \text{ sont } (\varepsilon, n) \text{ séparés } \iff \text{dist}\,(x, y) > \varepsilon$$

$$\text{DONC} \quad r(\varepsilon, n) \leq \varepsilon^{-1} \quad \text{et} \quad h_{\text{top}} = 0$$

B) $\theta \mapsto 2\theta$ sur le cercle, $\mu =$ Lebesgue

$$P_n = \left\{ \left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n} \right), 0 \leq i < 2^n \right\}, H(P_n) = n \log 2$$

$$P_m \vee T^{-1} P_m \vee \ldots \vee T^{-(n-1)} P_m = P_{m+n}$$

Donc

$$h_\mu(T, P_m) = \lim_{n \to +\infty} \frac{m+n}{n} \log 2 = \log 2$$

$$h_\mu(T) = \log 2$$

Par ailleurs

$$r(\varepsilon, n) \leq 2^n \varepsilon^{-1}$$

donc

$$h_{\text{top}}(T) = \log 2 = h_\mu(T)\,.$$