Troisième Leçon

Systèmes dynamiques chaotiques (hyperboliques)

— Transformations dilatantes (non inversibles)

— Difféomorphismes d'Anosov

— Hyperbolicité non uniforme, exposants de Lyapounov

TRANSFORMATIONS DILATANTES

$X = \mathbf{T}$ (ou $\mathbf{T}^n$)

$T : X \to X$ est **dilatante** s'il existe $\lambda > 1$ tel qu'on ait

$$\text{dist}\,(Tx, Ty) \geq \lambda\,\text{dist}\,(x, y)$$

quand x, y sont assez proches. Au niveau infinitésimal

$$\|T'(x).v\| \geq \lambda\|v\|\ , \quad \text{pour tous } x, v\ .$$

Il existe donc $\varepsilon_0 > 0$ tel qu'on ait

$$\text{dist}\,(T^n x, T^n y) \geq \lambda^n\,\text{dist}\,(x, y)$$

tant que dist $(T^{n-1}x, T^{n-1}y) \leq \varepsilon_0$.

En particulier, pour tous x, y distincts, il existe $n = n(x, y)$ tel que

$$\text{dist}\,(T^n x, T^n y) > \varepsilon_0 \qquad \text{(expansivité)}$$

LA PROPRIETE DE POURSUITE

PSEUDO-ORBITES : Soit $\delta > 0$. Une suite $(x_0, x_1, \ldots)$ est une δ-pseudo-orbite pour T si on a, pour tout entier n

$$\text{dist}\,(T(x_n), x_{n+1}) < \delta$$

<u>Exemples</u> 1. Erreurs d' arrondi dans une simulation numérique.

2. Connaissance imparfaite de la transformation à itérer.

La pseudo-orbite $(x_0, x_1, \ldots)$ η-poursuit la vraie orbite $(x, Tx, T^2x, \ldots)$ si on a, pour tout entier n

$$\text{dist}\,(x_n, T^n x) < \eta$$

<u>Théorème</u> : Supposons T dilatante. Il existe $C > 0$ tel que, pour tout $\delta > 0$ assez petit, toute δ-pseudo-orbite $C\delta$-poursuit une (unique) vraie orbite de T.

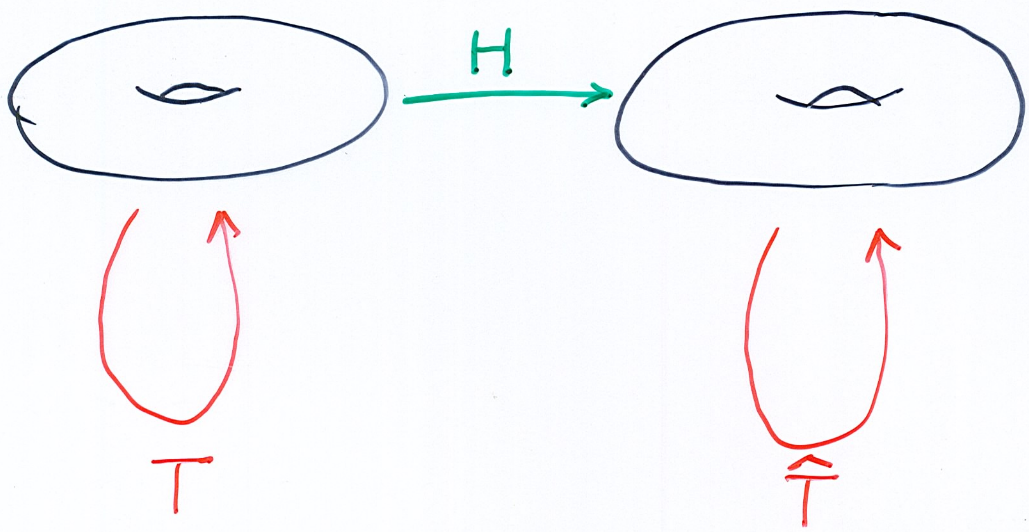
STABILITE STRUCTURELLE

Soit $T : X \to X$ une transformation dilatante.

Si $\hat{T} : X \to X$ est assez proche de T (et $\hat{T}'$ assez proche de T'), alors $\hat{T}$ est aussi dilatante.

De plus, il existe un "changement de variables" $H : X \to X$ tel qu'on ait $\hat{T} = H \circ T \circ H^{-1}$

(H et H^{-1} sont continus, mais en général pas différentiables ...)



MESURE “PHYSIQUE”

Une transformation dilatante possède de nombreuses orbites périodiques et donc aussi de nombreuses mesures de probabilité invariantes ...

MAIS il en existe **une et une seule** qui soit donnée par une **densité** par rapport à la mesure de Lebesgue sur X (elle ne charge pas les parties de mesure de Lebesgue nulle). Elle est ergodique.

C'est la mesure invariante “physiquement observable” : si φ est une fonction continue sur X et x est un point “pris au hasard”, on aura (théorème de Birkhoff) :

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \varphi(T^i x) = \int \varphi \, d\mu$$

La mesure physique est mélangeante, avec décroissance exponentielle des corrélations.

STABILITE STOCHASTIQUE

δ-pseudo-orbite aléatoire : Dans la suite (de variables aléatoires) $(x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ les "erreurs" $x_{n+1} - T(x_n)$ sont d'ordre δ et **indépendantes**. Le point x_0 est choisi au hasard.

Principes généraux : presque sûrement, pour tout $\varphi \in C(X)$

$$\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \varphi(x_i) \longrightarrow \int \varphi \, d\mu_\delta$$

pour une certaine mesure de probabilité μ_δ.

Stabilité stochastique : Pour toute fonction continue φ

$$\int \varphi \, d\mu_\delta \longrightarrow \int \varphi \, d\mu$$

AUTOMORPHISMES LINEAIRES HYPERBOLIQUES DE $\mathbf{T}^n$

$A = (a_{ij})$ matrice $n \times n$, $a_{ij} \in \mathbf{Z}$, $|$ dét $A| = 1$

(donc A^{-1} est aussi à coefficients entiers)

A définit une application linéaire de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$

vérifiant $A(\mathbf{Z}^n) = \mathbf{Z}^n$

donc définit aussi une transformation inversible de $\mathbf{T}^n$ dans $\mathbf{T}^n$.

<u>Définition</u> : A est **hyperbolique** si aucune valeur propre de A n'est de module 1.

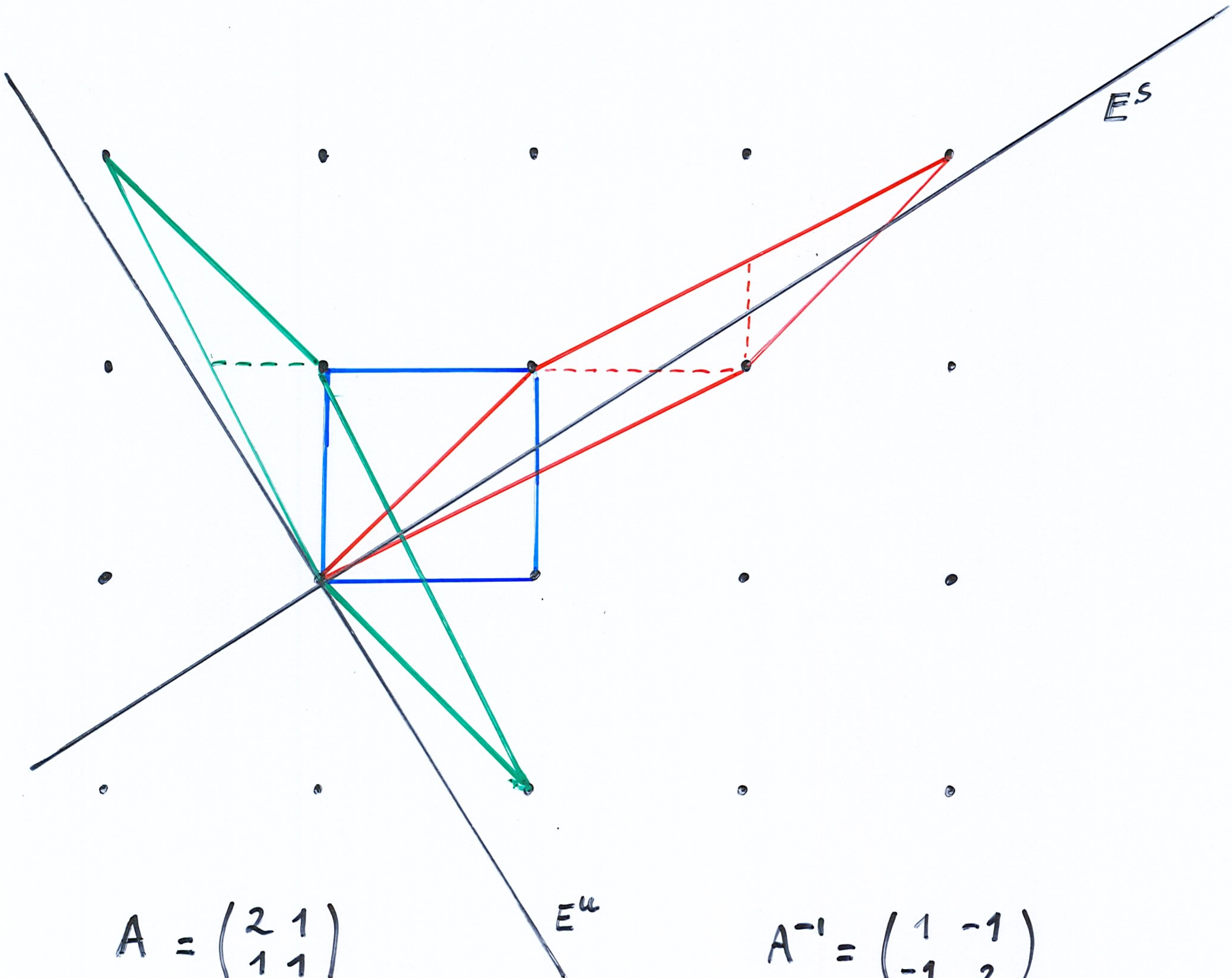
On a alors $\quad \mathbf{R}^n = E^s \oplus E^u$

avec
$$E^s = \{v, A^n v \quad \longrightarrow \quad 0\}$$
$$E^u = \{v, A^n v \quad \longrightarrow \quad 0\}$$

On a $E^s \cap \mathbf{Z}^n = E^u \cap \mathbf{Z}^n = \{0\}$.

Les images de E^s et E^u dans $\mathbf{T}^n$ sont denses.

AUTOMORPHISMES LINEAIRES HYPERBOLIQUES DE $\mathbf{T}^n$ (suite)



$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

La mesure de Lebesgue sur $\mathbf{T}^n$ est invariante par A.

Elle est ergodique et même mélangeante, avec décroissance exponentielle des corrélations.

DIFFEOMORPHISMES D'ANOSOV DE $\mathbf{T}^n$

Soit T un difféomorphisme de classe C^1 de $\mathbf{T}^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$.

C'est un **difféormorphisme d'Anosov** s'il existe en chaque point x de $\mathbf{T}^n$ une décomposition $T_x\mathbf{T}^n = E^s(x) \oplus E^u(x)$ telle que

1. **continuité** E^s et E^u dépendent continument de x

2. **invariance** $T'(x)\ E^s(x) = E^s(Tx)$,
   $T'(x)\ E^u(x) = E^u(Tx)$.

3. **contraction** Il existe $C > 0, \lambda > 1$ tel qu'on ait

   - pour $v \in E^s(x), n > 0$ $\|(T^n)'(x)v\| \leq C\lambda^{-n}\|v\|$,

   - pour $v \in E^u(x), n < 0$ $\|(T^n)'(x)v\| \leq C\lambda^{n}\|v\|$.

– Un automorphisme linéaire hyperbolique de $\mathbf{T}^n$ vérifie ces propriétés.

– Si T est un difféomorphisme d'Anosov, et $\hat{T}$ est assez proche de T (au sens C^1), $\hat{T}$ est aussi un difféomorphisme d'Anosov.

PROPRIETES DES DIFFEOMORPHISMES D'ANOSOV

- **Expansivité** : pour tous x, y distincts, il existe $n = n(x, y) \in \mathbf{Z}$ tel que

$$\text{dist}\,(T^n x, T^n y) > \varepsilon_0$$

- **Poursuite** : pseudo-orbites et orbites sont indexées par $\mathbf{Z}$.

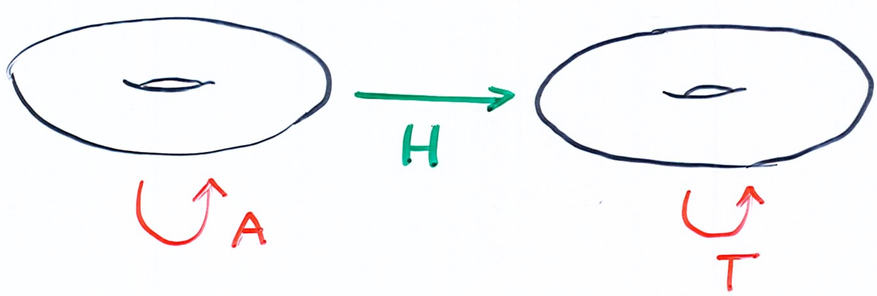
- **Stabililté structurelle** : On écrit

$$Tx = Ax + \varphi(x)$$

avec A automorphisme linéaire de $\mathbf{T}^n$ et φ $\mathbf{Z}^n$-périodique.

ALORS, A est hyperbolique et il existe un homéomorphisme H de $\mathbf{T}^n$ tel que

$$T = H \circ A \circ H^{-1} \qquad \text{(FRANKS)}$$



PROPRIETES DES DIFFEOMORPHISMES D'ANOSOV

- **Expansivité** : pour tous x, y distincts, il existe $n = n(x, y) \in \mathbf{Z}$ tel que

$$\text{dist}\,(T^n x, T^n y) > \varepsilon_0$$

- **Poursuite** : pseudo-orbites et orbites sont indexées par $\mathbf{Z}$.

- **Stabililté structurelle** : On écrit

$$Tx = Ax + \varphi(x)$$

avec A automorphisme linéaire de $\mathbf{T}^n$ et φ $\mathbf{Z}^n$-périodique.

ALORS, A est hyperbolique et il existe un homéomorphisme H de $\mathbf{T}^n$ tel que

$$T = H \circ A \circ H^{-1} \qquad \text{(FRANKS)}$$

FEUILLETAGES STABLES ET INSTABLES

Soit T un difféomorphisme d'Anosov.

$$W^s(x) = \{y \in \mathbf{T}^n,\ \text{dist}\,(T^n x, T^n y) \ \longrightarrow\ 0\}\ ,$$

$$W^u(x) = \{y \in \mathbf{T}^n,\ \text{dist}\,(T^n x, T^n y) \ \longrightarrow\ 0\}\ .$$

$$W^s_{\text{loc}}(x) = \{y \in \mathbf{T}^n,\ \text{dist}\,(T^n x, T^n y) < \varepsilon_0\ \text{ pour tout }\ n \geq 0\}$$

$$W^u_{\text{loc}}(x) = \{y \in \mathbf{T}^n,\ \text{dist}\,(T^n x, T^n y) < \varepsilon_0\ \text{ pour tout }\ n \leq 0\}$$

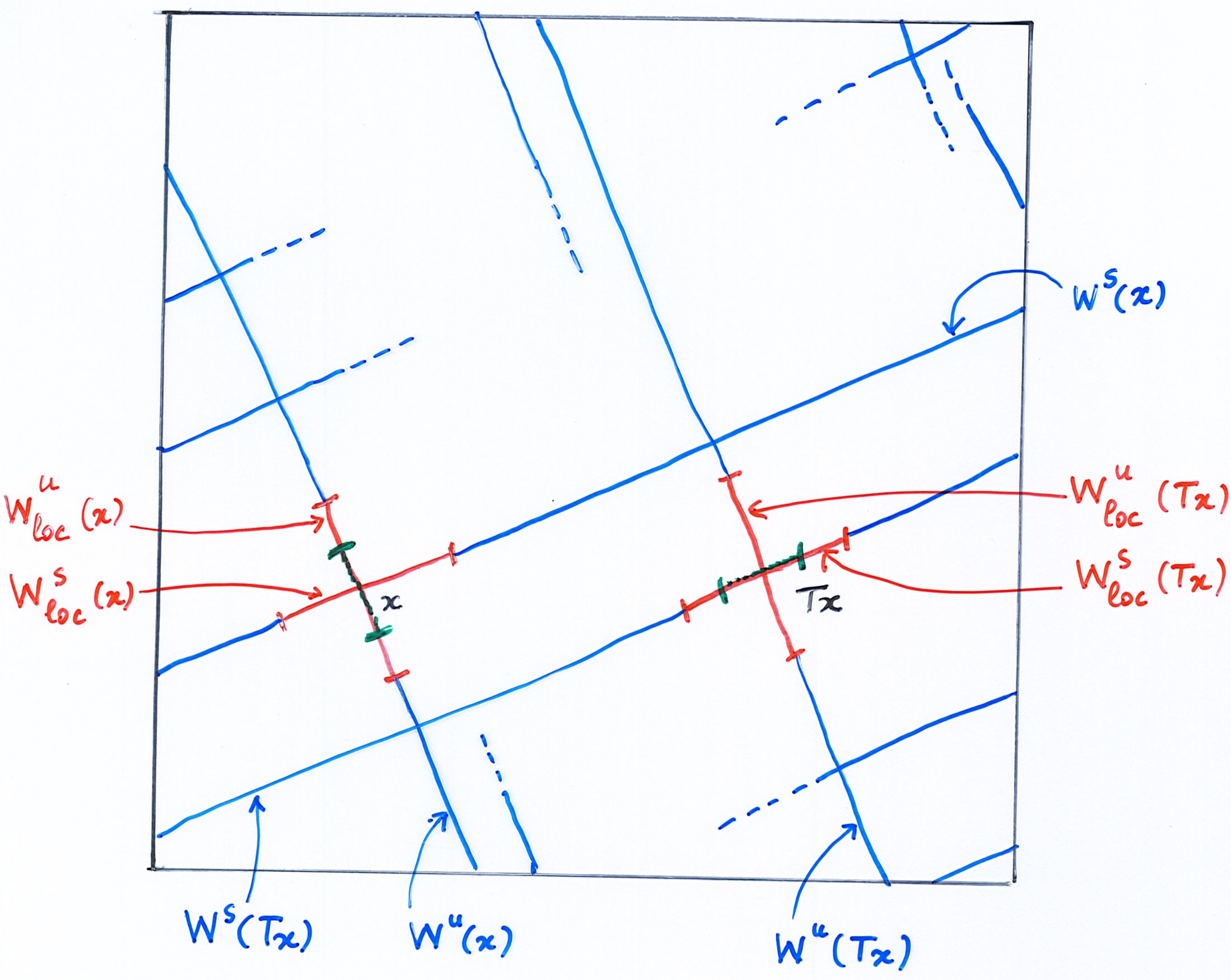
$$W^s(x) = \cup_{n\geq 0}\ T^{-n}(W^s_{\text{loc}}\,(T^n x))$$

$$W^u(x) = \cup_{n\leq 0}\ T^{-n}(W^s_{\text{loc}}\,(T^n x))$$

$$T(W^s(x)) = W^s(Tx),\ T(W^s_{\text{loc}}\,(x)) \subset W^s_{\text{loc}}\,(Tx)\ ,$$

$$T(W^u(x)) = W^u(Tx),\ T^{-1}(W^u_{\text{loc}}\,(x)) \subset W^u_{\text{loc}}\,(T^{-1}x)\ .$$

FEUILLETAGES STABLES ET INSTABLES
(suite)



MESURES PHYSIQUES

Si A est linéaire hyperbolique, d'après le théorème de Birkhoff, on a, pour Lebesgue presque tout x et $\varphi \in C(\mathbf{T}^n)$

$$\frac{1}{N} S_N \varphi(x) \longrightarrow \int_{\mathbf{T}^n} \varphi(x)\, dx$$

En général, il n'existe pas de mesure invariante par $\mathbf{T}$ qui ait une densité par rapport à la mesure de Lebesgue. On montre cependant qu'il existe des mesures de probabilité invariantes μ_+, μ_- telles qu'on ait, pour toute fonction φ continue sur $\mathbf{T}^n$ et Lebesgue presque tout point x de $\mathbf{T}^n$

$$\frac{1}{N} S_N \varphi(x) \longrightarrow \int \varphi(x)\, d\mu_+(x) ,$$

$$\frac{1}{N} S_N \varphi(x) \longrightarrow \int \varphi(x)\, d\mu_-(x) .$$

LE THEOREME ERGODIQUE MULTIPLICATIF D'OSELEDETS (1968)

X, espace des phases

$T : X \to X$ (inversible)

μ mesure de probabilité invariante **ergodique**

Il s'agit de comprendre les dérivées $(T^n)'(x)$ lorsque $n \to \pm\infty$.

En μ-presque tout point $x \in X$, on aura une décomposition de l'espace tangent en x en une somme directe

$$E_1(x) \oplus E_2(x) \oplus \ldots \oplus E_r(x)\ ;$$

les sous-espaces $E_1(x), \ldots, E_r(x)$ sont associés à des nombres $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_r$ (**exposants de Lyapounov**) tels que

EXPOSANTS DE LYAPOUNOV

1. **Invariance** $T'(x)E_i(x) = E_i(Tx)$

2. Pour $v \in E_i(x), v \neq 0$

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \|(T^n)'(x)v\| = \lambda_i$$

Exemple : Pour un automorphisme linéaire d'un tore A, la dérivée $A'(x)$ est constante égale à A et les λ_i sont les **logarithmes des modules des valeurs propres** de A.

Hyperbolicité non uniforme : aucun des λ_i n'est nul.

Problème : identifier une mesure de référence μ

Beaucoup de travaux dans cette direction actuellement ...