Quatrième Leçon

Systèmes dynamiques quasipériodiques

— Difféomorphismes du cercle

— Petits diviseurs, conditions diophantiennes

— Courbes invariantes

NOMBRE DE ROTATION

f homéomorphisme du cercle préservant l'orientation

F relèvement de f : $F(\theta) = \theta + \varphi(\theta), \varphi$ $\mathbf{Z}$-périodique

Poincaré : la suite $\frac{F^n(\theta)-\theta}{n}$ converge uniformément vers une constante $\rho(F)$ appelée **nombre de rotation** de F. Le nombre de rotation de f est égal à $\rho(F)$ mod 1.

Propriétés :

$$\rho(F) > p/q \Longleftrightarrow F^q(\theta) > \theta + p \quad \text{pour tout } \theta \ ,$$

$$\rho(F) < p/q \Longleftrightarrow F^q(\theta) < \theta + p \quad \text{pour tout } \theta \ ,$$

$$\rho(F) = p/q \Longleftrightarrow \exists \ \theta_0 \quad \text{tel que } F^q(\theta_0) = \theta_0 + p \ .$$

$$\rho(HFH^{-1}) = \rho(F) \ .$$

$$\rho(F^n) = n\rho(F) \ .$$

$$\rho(R_\omega) = \omega \ , \quad \text{où } \ R_\omega(\theta) = \theta + \omega \ .$$

THEOREME DE DENJOY

Lorsque $\rho(f) = 0 \bmod 1$, f a au moins un point fixe. En général, f n'a qu'un nombre fini de points fixes alternativement attractifs et répulsifs.

La situation est similaire lorsque $\rho(f)$ est plus généralement rationnel.

Par contre, lorsque $\rho(f)$ est irrationnel, on a

<u>Théorème</u> (Denjoy) Supposons que f soit un difféomorphisme de classe C^2 et que $\rho(F) = \omega$ soit irrationnel. Alors il existe un homéomorphisme du cercle H qui conjugue f et la rotation $\theta \mapsto \theta + \omega$.

<u>Question</u> : Les orbites de f sont-elles bien distribuées sur le cercle ? La conjugaison H est-elle différentiable ?

PETITS DIVISEURS

Linéarisons l'équation de conjugaison $H \circ R_\omega = F \circ H$ en $F_0 = R_\omega, H_0 = id$: écrivons $F = R_\omega + \Delta F, H = id + \Delta H$.
On obtient

$$\Delta H \circ\ R_\omega = \Delta H + \Delta F \qquad \text{(au 1}^{\text{er}}\text{ ordre)}$$

$$\Delta H(\theta) = \Sigma\ \Delta \hat{H}(n)\ \exp\ 2\pi i n\theta$$

$$\Delta F(\theta) = \Sigma\ \Delta \hat{F}(n)\ \exp\ 2\pi i n\theta$$

$$\Delta \hat{H}(n)\ \ (\exp\ 2\pi i n\omega - 1) = \Delta \hat{F}(n)$$

Il faut donc avoir

$$\Delta \hat{F}(0) = \int \Delta F(\theta) d\theta = 0$$

(correspondant à la condition $\rho(F) = \omega$)

Les autres coefficients sont formellement donnés par

$$\Delta \hat{H}(n) = \frac{1}{\exp\ 2\pi i n\omega - 1}\ \Delta \hat{F}(n)\ ,\ n \neq 0\ .$$

CONDITION DIOPHANTIENNE

Supposons par exemple que ΔF soit de classe C^∞. Cela revient à dire

$$\Delta\hat{F}(n) = O(|n|^{-A}) \quad \text{pour tout } A > 0\ .$$

Pour qu'on puisse **garantir** la même décroissance pour $\Delta\hat{H}(n)$, il faut et il suffit qu'il existe $B > 0$ tel que

$$\frac{1}{\exp\ 2\pi i n\omega - 1} = O(|n|^B)\ .$$

Un nombre irrationnel ω vérifiant cette propriété est dit **diophantien**.

Théorème : Si f est de classe C^∞ et $\omega = \rho(F)$ est diophantien, la conjugaison H est de classe C^∞. Si ω n'est **pas** diophantien, il se peut que f soit de classe C^∞ mais H pas de classe C^1.

ARNOLD-MOSER-**HERMAN**- Y.

FRACTION CONTINUE

On observe que $|\exp\ 2\pi i n\omega - 1|$ est du même ordre que $|||n\omega||| = \min_p |n\omega - p|$. Il s'agit de comprendre les approximations rationnelles du nombre irrationnel ω.

$$\omega = \omega_0 \in (0,1) \quad \omega_n^{-1} = a_{n+1} + \omega_{n+1} \quad , \quad a_{n+1} \geq 1 \ , \ \omega_{n+1} \in [0,1)$$

$$\omega_0 = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \omega_n}}}} \qquad = \qquad \frac{p_n + p_{n-1}\omega_n}{q_n + q_{n-1}\omega_n}$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} p_n = a_n\, p_{n-1} + p_{n-2} & p_0 = 0 \quad p_{-1} = 1 \\ q_n = a_n\, q_{n-1} + q_{n-2} & q_0 = 1 \quad q_{-1} = 0 \end{cases}$$

Les p_n/q_n sont les réduites de ω, meilleures approximations rationnelles dans le sens suivant

APPROXIMATION DIOPHANTIENNE

Si $0 < |q\omega - p| < |q_n\omega - p_n|$, on a $|q| \geq q_{n+1}$

On a

$$\frac{1}{a_{n+1}\, q_n} > |q_n\, \omega - p_n| = \frac{1}{q_{n+1} + q_n\, \omega_{n+1}} > \frac{1}{(a_{n+1}+2)q_n}$$

Donc il y a équivalence

$$\frac{1}{\exp\ 2\pi i n\omega - 1} = 0(|n|^B) \quad\Longleftrightarrow\quad a_{n+1} = 0(q_n^{B-1})$$

Pour tout $B > 1$, l'ensemble des nombres ω satisfaisant

$$|||n\omega|||^{-1} = 0(|n|^B)$$

est de **mesure de Lebesgue pleine**.

LA THEORIE KAM

KOLMOGOROV – ARNOLD – MOSER

Résultats de "stabilité" de mouvements quasipériodiques dans divers contextes.

On va présenter un théorème de Herman, généralisant des travaux antérieurs de Moser et Rüssman.

Cadre : Difféomorphismes de l'anneau $\mathbf{A} = \mathbf{T} \times [-1, +1]$
$(\theta \ , \ r)$

On a un premier difféomorphisme N (de classe C^∞) vérifiant

$$N(\theta, 0) = (f(\theta), 0)$$

$$\text{avec} \quad \rho(f) = \omega$$

$$DC(\gamma, \tau) \qquad |||q\omega||| \geq \gamma q^{-1-\tau} \ , \ \ \forall q \geq 1$$

pour certains γ, τ.

UN THEOREME DE HERMAN

On va considérer des familles à 2 paramètres de perturbations

$$F_{a,b}\ (\theta, r) = N(\theta, r) + \varphi(\theta, r) + (a, b)$$

Si φ est assez petit dans la C^∞ topologie,

ALORS pour chaque $\hat{\omega}$ proche de ω vérifiant $DC(\gamma, \tau)$ il existe des paramètres $\hat{a} = a(\hat{\omega})$, $\hat{b} = b(\hat{\omega})$ et un graphe $\{r = \Psi_{\hat{\omega}}(\theta)\}$ qui soit invariant par $F_{\hat{a},\hat{b}}$

$$F_{\hat{a},\hat{b}}(\theta, \Psi_{\hat{\omega}}(\theta)) = (\hat{f}(\theta), \Psi_{\hat{\omega}}(\hat{f}(\theta)))$$

$$\text{avec} \qquad \begin{aligned} \rho(\hat{f}) &= \hat{\omega} \\ \Psi_{\hat{\omega}}(0) &= 0 \end{aligned}$$

De plus, l'application $(\varphi, \hat{\omega}) \mapsto (\hat{a}, \hat{b}, \Psi_{\hat{\omega}})$ est "différentiable".

APPLICATION DU THEOREME DE HERMAN

Considérons un difféomorphisme F de $\mathbf{A}$ (de classe C^∞).

Supposons que la restriction de F au bord supérieur de $\mathbf{A}$

$$F(\theta, 1) = (f(\theta), 1)$$

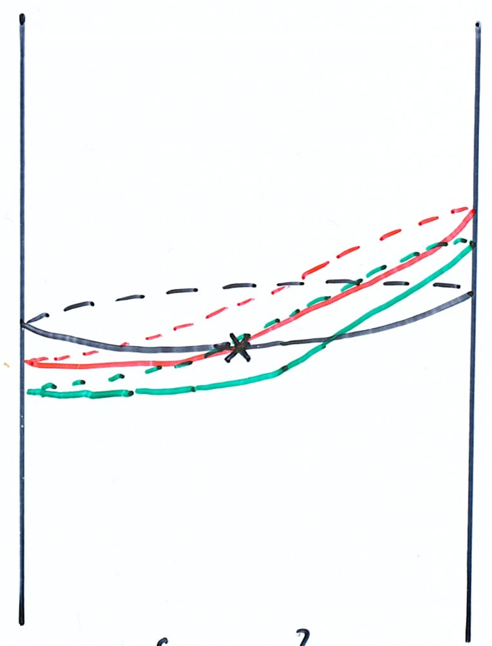
ait un nombre de rotation ω qui soit **diophantien**.

Supposons aussi que F préserve une mesure de probabilité μ sur $\mathbf{A}$ qui charge les ouverts.

ALORS les orbites voisines du bord supérieur sont confinées par des courbes invariantes s'accumulant sur le bord supérieur.

La réunion de ces courbes invariantes, bien que ne possédant pas de point intérieur, a une surface (mesure de Lebesgue) strictement positive.

LE THEOREME DE HERMAN ET SES CONSEQUENCES



$\{r = 0\}$

$\{r = \psi(\theta)\}$

$\{r = \psi(\theta + a) - b\}$